Recuperación Primer Parcial de Análisis Matemático II

Fecha: 6/12/24 **Apellido y Nombre:**

Curso: **Legajo:**

1. Sea $z = h(x; y)$ función compuesta que resulta de $h = f \circ \bar{g}$ con $f(u; v) = \ln(\frac{u}{v})$; $\bar{g}(x; y) = (\frac{y}{x}; v(x; y))$ donde $v(x; y)$ viene definida implícitamente por la ecuación $v^2 e^{v-2} - xy^2 = 0$; determine $\breve{u}$ / $h'((1; 2); \breve{u}))$ sea máxima
2. Determine los puntos de la superficie $z + 4 = x^2 + y^2$en que su plano tangente es paralelo al plano $8x + 2y = 2z$
3. Determine si existen extremos relativos para la función $f(x; y) = xy^2 - 2x + x^2 + 10$ en su dominio natural; de existir clasifíquelos y calcular su valor

---

4. Halle la curva en la que en cada punto tiene recta tangente de pendiente igual a la suma de las coordenadas del punto y pasa por $(0; 0)$

---

5. a)Defina curva regular en un punto de la misma b) Verifique si la curva C dada por $\bar{F}(u) = (u^2; u + 1; 1 - u)$ es regular en $\bar{A} = (1; 2; 0)$
6. a)Defina curva de nivel para la función $z = f(x; y)$ con $f: D \subset R^2 \to R$ b) Exprese y dibuje la curva de nivel de valor cero de $f(x; y) = x^2 + y^2 - 2x$

AM2	Recup 1° parcial Hernández	HOJA N° 1/2 FECHA 6-12-24

① Sea $z = h(x,y)$ función compuesta que resulta de $h = f \circ \bar{g}$ con $f(u,v) = \ln\left(\frac{u}{v}\right)$; $\bar{g}(x,y) = \left(\frac{y}{x} ; v(x,y)\right)$ donde $v(x,y)$ viene definida implícitamente por la ec. $v^2 e^{v-2} - xy^2 = 0$, determinar $\breve{u} \,/\, h'((1;2); \breve{u})$ sea máxima

h es diferenciable porque f es dif. y $\bar{g}$ también

$\Rightarrow h'((1;2), \breve{u})\Big|_{\text{máx}}$ se da en la dirección del gradiente

$$\rightarrow \boxed{\breve{u} = \frac{\nabla h(1,2)}{\|\nabla h(1,2)\|}}$$

$$D\bar{g} = \begin{pmatrix} -\frac{y}{x^2} & \frac{1}{x} \\ v'_x & v'_y \end{pmatrix}$$

h dif $\rightarrow Dh_{(1,2)} = Df_{(\bar{g}(1,2))} \cdot D\bar{g}(1,2)$

$\bar{g}(1,2) = \left(\frac{2}{1} ; v_{(1,2)}\right) = (2,2) = \bar{g}(1,2)$

$\hookrightarrow$ hallo $v_{(1,2)} \rightarrow v^2 e^{v-2} - 1 \times 2^2 = 0$

$\boxed{v_{(1,2)} = 2} \Longleftarrow \boxed{v = 2}$ cumple $\rightarrow 2^2 e^{2-2} - 2^2 = 0$

$4 - 4 = 0$ ✓

$$Dh_{(1,2)} = Df_{(2,2)} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{2}{1^2} & \frac{1}{1} \\ v'_{x(1,2)} & v'_{y(1,2)} \end{pmatrix}$$

$f'_{u(u,v)} = \frac{1}{u/v} \cdot \frac{1}{v} = \frac{v}{u} \cdot \frac{1}{v} = \boxed{\frac{1}{u} = f'_{u(u,v)}} \rightarrow \boxed{f'_{u(2,2)} = \frac{1}{2}}$

$f'_{v(u,v)} = \frac{1}{u/v} \cdot \frac{-u}{v^2} = \frac{\cancel{v}}{\cancel{u}}\left(\frac{-u}{v^2}\right) = \left(\frac{-1}{v}\right) = f'_{v(u,v)} \rightarrow \boxed{f'_{v(2,2)} = -\frac{1}{2}}$

x TFI: $G(x,y,v) = v^2 e^{v-2} - xy^2$

$v'_x = -\frac{G'_x}{G'_z}$ $\qquad v'_y = -\frac{G'_y}{G'_z}$

$G'_v = 2v e^{v-2} + v^2 e^{v-2} \rightarrow G'_{v(1,2,2)} = 8$

$G'_x = -y^2 \longrightarrow G'_{x(1,2,2)} = -4$

$G'_y = -2xy \longrightarrow G'_{y(1,2,2)} = -4$

$\boxed{\begin{aligned} v'_{x(1,2)} &= -1/2 \\ v'_{y(1,2)} &= -1/2 \end{aligned}}$

$$Dh_{(1,2)} = \begin{bmatrix} 1/2 & -1/2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1/2 & -1/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{5}{4} & \frac{3}{4} \end{bmatrix}$$

$\qquad\qquad h'_x \quad h'_y$

$\|\nabla h_{(1,2)}\| = \frac{\sqrt{34}}{4}$

$$\boxed{\breve{u} = \left(\frac{5\sqrt{34}}{34} , \frac{3\sqrt{34}}{34}\right)}$$

NOTA

② Determinar los puntos de la sup $\overbrace{z+4 = x^2+y^2}^{S}$ en que su plano tangente es paralelo al plano $\underbrace{8x+2y=2z}_{T} \longrightarrow 4x+y=z$

$G(x,y,z) = z+4-x^2-y^2 \rightarrow$ S es sup. de nivel $0 \rightarrow \nabla G \parallel N_S$

$H(x,y,z) = 4x+y-z \rightarrow$ T es " " " $0 \Rightarrow \nabla H \parallel N_T$

$\nabla G(x,y,z) = (-2x, -2y, 1) \parallel N_S \parallel N_{PT_S}$

$\nabla H(x,y,z) = (4, 1, -1)$

si el plano tang a S es $\parallel$ a T $\rightarrow$ los normales son paralelos

$\Rightarrow (-2x, -2y, 1) = k(4,1,-1)$

$\begin{cases} -2x = 4k \\ -2y = k \\ 1 = k(-1) \rightarrow \boxed{k=-1} \end{cases} \rightarrow \begin{matrix} 2x = 4 \\ 2y = 1 \end{matrix} \rightarrow \boxed{\begin{matrix} x=2 \\ y=1/2 \end{matrix}}$

$S: \; z+4 = x^2+y^2 \xrightarrow[\text{para } x=2 \;\; y=1/2]{\text{hallo } z} z = \cancel{2^2} + (1/2)^2 \cancel{-4} = 1/4$

$\boxed{P = (2, 1/2, 1/4)}$

---

③ Determinar si existen extremos relativos para la función $f(x,y) = xy^2 - 2x + x^2 + 10$ en su dominio nat. (si $\exists$ clasificarlo y calcular su valor)

f es dif $\rightarrow$ busco $(x,y) \,/\, \nabla f(x,y) = (0,0)$

$\begin{cases} f'_x(x,y) = 0 = y^2 - 2 + 2x \\ f'_y(x,y) = 0 = 2xy \longrightarrow \boxed{x=0} \vee \boxed{y=0} \end{cases}$

si $x=0 \rightarrow 0 = y^2 - 2 \rightarrow 2 = y^2$

$\boxed{PC_1 = (0, \sqrt{2})}$
$\boxed{PC_2 = (0, -\sqrt{2})}$

si $\boxed{y=0} \rightarrow 0 = 0^2 - 2 + 2x \rightarrow 2x = 2 \rightarrow x = 1$

$\boxed{PC_3 = (1,0)}$

Hessiano

$\left.\begin{matrix} f''_{xx} = 2 \\ f''_{xy} = 2y \\ f''_{yy} = 2x \end{matrix}\right\} H(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & 2y \\ 2y & 2x \end{pmatrix} \rightarrow |H(PC_1)| = \begin{vmatrix} 2 & 2\sqrt{2} \\ 2\sqrt{2} & 0 \end{vmatrix} = -8$ Punto silla (no es extremo)

$(0,\sqrt{2})$

$|H(PC_2)| = \begin{vmatrix} 2 & -2\sqrt{2} \\ -2\sqrt{2} & 0 \end{vmatrix} = -8$ Punto silla (")

$(1,0)$

$|H(PC_3)| = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4 > 0$ ✓ es extremo. $f''_{xx} = 2 > 0 \rightarrow$ es mínimo local

$f(1,0) = 0 - 2 + 1 + 10 = 9$

$\boxed{\begin{matrix} f(1,0) \text{ es mínimo local} \\ \text{y tiene valor } 9 \end{matrix}}$

NOTA

AM2	Recup 1° parcial Hernandez	HOJA N° 2/2 FECHA 6-12-24

(4) Hallar la curva en la que, en cada punto, tiene recta tangente de pendiente igual a la suma de coordenadas en el punto y pase por (0,0)

pendiente recta tangente : $y' \rightarrow \underbrace{y' = x + y}$

$$\boxed{-y + y' = x}$$

SH) $-y + y' = 0$

$$y' = y \rightarrow \frac{y'}{y} = 1 \xrightarrow{\text{integro}} \ln(y) = x + c$$

$$e^{\ln(y)} = e^{x+c}$$

$A \in \mathbb{R}$

$$\boxed{y_H = ke^x}$$

SP) $y_p = Bx + C$

$y'_p = B$

$\rightarrow -y + y' = x$

$\underbrace{-Bx}_{1} - C + B = x \rightarrow \begin{cases} -B = 1 \rightarrow \boxed{B = -1} \\ \underbrace{-C + B = 0}_{B = C} \rightarrow \boxed{C = -1} \end{cases}$ $\boxed{y_p = -x - 1}$

$$y_G = Ae^x - x - 1$$

pase por (0,0) $\rightarrow \left.\begin{matrix} x = 0 \\ y = 0 \end{matrix}\right\}$ $0 = Ae^0 - 0 - 1 = A - 1 \rightarrow A = 1$

$$\boxed{y_{(x)} = e^x - x - 1}$$

NOTA

(5) a) Definir curva regular en un punto de la misma

Sea $\bar{g} : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ $\bar{g}$ es parametrización de C

si $\forall t \in \mathbb{R}$ $\bar{g}'_{(t)} \neq \bar{0}$ entonces la curva es regular

b) Verificar si la curva dada por $\bar{F}_{(u)} = (u^2; u+1; 1-u)$ es regular en $\bar{A} = (1,2,0)$

$\bar{F}'_{(u)} = (2u, 1, -1) \neq (0,0,0)$ $\forall u \in \mathbb{R}$ $\to$ es una curva REGULAR

---

(6) a) Definir curva de nivel para la función $z = f_{(x,y)}$ con
$f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$C_k = \{(x,y) \in D \ / \ f_{(x,y)} = k\}$$

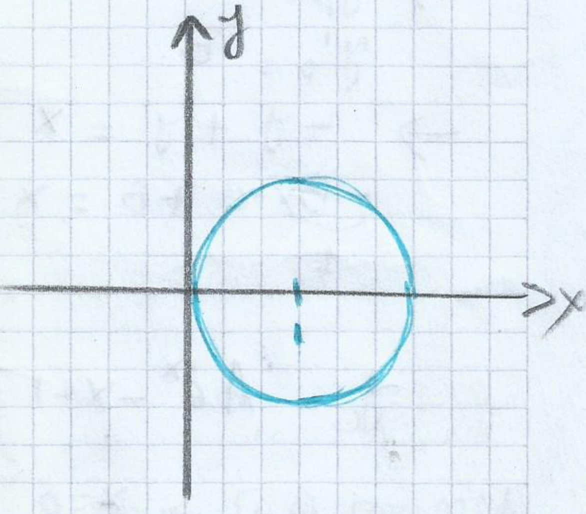
b) ~~Dibujar~~ Expresar y dibujar la curva de nivel de valor cero de $f_{(x,y)} = x^2 + y^2 - 2x$

$C_0 = \{(x,y) \in \mathbb{R} \ / \ f_{(x,y)} = 0\}$

$\to x^2 + y^2 - 2x = 0$

$\underbrace{x^2 - 2x + 1}\ -1 + y^2 = 0$

$\boxed{(x-1)^2 + y^2 = 1}$



NOTA